MAT-120 Tarea 9

Teoría de Números

Fecha limite: 30 de octubre de 2023

1. Sean $a, n \in \mathbf{Z}$. Demostrar que $(n, a) = 1$ si y solo si $(n, n-a) = 1$.

2. Utilizar la Generalización de Euler del Teorema Pequeño de Fermat (GETPF) para demostrar:

a) $a^{16} \equiv 1 \pmod{48}$ para $a \in \mathbf{Z}$ con $(a, 48) = 1$.

b) $a^8 \equiv 1 \pmod{48}$ para $a \in \mathbf{Z}$ con $(a, 48) = 1$. (Necesitará pegamento.)

3. Utilizar la GETPF para demostrar que, para todo $n \in \mathbf{Z}^+$, $51 | 10^{32n+9} - 7$.

4. Sea $\omega(n)$ la función que cuenta el número de factores primos de n.

a) Utilizar en ejemplo para demostrar que $\omega(n)$ no es multiplicativo.

b) Demostrar que $f(n) = 2^{\omega(n)}$ es multiplicativo.

5. Sea$p$ un primo y $k, l \in \mathbf{Z}^+$ con $k \leq l$. Para cada parte, demostrar lo siguiente, o dar un contraejemplo para refutar.

a) $p^k | p^l$

b) $\phi(p^k) | \phi(p^l)$

c) $\tau(p^k) | \tau(p^l)$

d) $\sigma(p^k) | \sigma(p^l)$

e) $\sigma(p^k) | \sigma(p^{2k})$

6. Demostrar que si $(n, 6) = 1$ entonces $\phi(6n) = \phi(4n)$.

7. Si $(a, n) = 1$, demostrar que la congruencia $ax \equiv b \pmod{n}$ tiene la solución $x \equiv ba^{\phi(n)-1} \pmod{n}$.

b) Utilizar la parte a) para resolver $7x \equiv 1 \pmod{26}$, $23x \equiv 32 \pmod{40}$, y $9x \equiv 21 \pmod{49}$.

8. Demostrar que si n producto de primos gemelos, entonces $\phi(n)\sigma(n) = n^2 - 2n - 3$.

9. Sea n el producto de los enteros $a_1, \ldots, a_k$. Demostrar que n es impar si y solo si cada a_i es impar. (Consejo: mod 2!)