MAT-120 Tarea 8

Teoría de Números

Fecha limite: 16 de octubre de 2023

1. Sean $a, b, c \in \mathbf{Z}$. Demostrar que $(a, bc) = 1$ si y solo si $(a, b) = 1$ y $(a, c) = 1$.
2. Sean m un entero fijo y j, k enteros arbitrarios. Demostrar que $(k, m) = (jm + k, m)$.
3. Verificar las siguientes fórmulas para $n = 24$, 31, y 32:

a) $\sum_{d|n} \mu(d) = I(n)$.

b) $\sum_{d|n} \mu(d)\tau\left(\frac{n}{d}\right) = 1$.

c) $\sum_{d|n} \mu(d)\sigma\left(\frac{n}{d}\right) = n$.

4. Calcular $\phi(3003)$, $\phi(3600)$, y $\phi(10080)$. ¡No hagas esto a mano!
5. Sean $i, j \in \mathbf{Z}^+$ con $j > 3$. Calcular $\phi(2^i 3^j)$, $\phi(\phi(2^i 3^j))$, y $\phi(\phi(\phi(2^i 3^j)))$.
6. Demostrar que si n es impar, entonces $\phi(2n) = \phi(n)$. [Consejo: factorización en primos!]
7. Demostrar que si n es par, entonces $\phi(2n) = 2\phi(n)$.
8. Demostrar que si p y $2p - 1$ son primos impares, entonces $n = 4p - 2$ satisface la ecuación $\phi(n) = \phi(n + 2)$.
9. Demostrar que si $d|n$, entonces $\phi(d)|\phi(n)$. [Consejo: factorización en primos!]