MAT-120 Tarea 7

Teoría de Números

Fecha limite: 9 de octubre de 2023

1. Demostrar que $d|n$ si y solo si $\frac{n}{d}|n$.

2. Si n es libre de cuadrados (es decir, que n no tiene ningún factor cuadrado mayor que 1), demostrar que $\tau(n) = 2^r$, en donde r es el número de divisores primos de n. (Consejo: Pensar en la factorización en primos de n.)

3. Hallar todas las soluciones a $\tau(n) = 4$.

4. Hallar todas las soluciones a $\sigma(n) = 32$.

5. Sea $k \in \mathbf{Z}^+$ un número fijado con $k > 1$.

a) Demostrar que hay infinitos números n tales que $\tau(n) = k$.

b) Demostrar que hay un número finito de soluciones a $\sigma(n) = k$. (Consejo: Pensar en el tamaño de $\sigma(n)$.)

6. Si $k \geq 2$, demostrar que $n = 2^{k-1}$ satisface la ecuación $\sigma(n) = 2n - 1$.

7. Demostrar que si $2^k - 1$ es primo, entonces $n = 2^{k-1}(2^k - 1)$ satisface la ecuación $\sigma(n) = 2n$. (Números de esta forma constituyen todos los números perfectos pares.)

8. Demostrar que si $2^k - 3$ es primo, entones $n = 2^{k-1}(2^k - 3)$ satisface la ecuación $\sigma(n) = 2n + 2$.

9. Para un entero fijado k,

a) Demostrar que la función $f(n) = n^k$ es multiplicativa.

b) Demostrar que $g(n) = kn$ no es, en general, multiplicativa.