TEORÍA ELEMENTAL DE NÚMEROS

DAVID M. BURTON, TRADUCIDO POR PAUL A. LOOMIS

2.5 La Ecuación Diofántica $ax + by = c$

Ahora cambiamos de enfoque y tomamos el estudio de ecuaciones diofánticas. El nombre honra el matemático Diofanto, quien inició el estudio de tales ecuaciones. No se sabe prácticamente nada de Diofanto como individuo, menos que vivió en Alejandría alrededor del año 250 d.C. La única evidencia positiva sobre la fecha de su actividad es que el Obispo de Laodicea, quien inició su episcopado en 270, dedicó un libro sobre computación egipcia a su amigo Diofanto. Aunque las obras de Diofanto se escribó en griego y él mostró el genio griego para abstracción teórica, lo más probable es que fuera una babilónico helenizado. Los únicos datos personales que tenemos de su carrera proviene de la redacción de una problema de epigrama (aparantemente data del siglo IV): su niñez duró 1/6 de su vida; su barba creció después de 1/12 más; después de 1/7 más se casó; su hijo nació 5 años más tarde; el hijo vivió hasta la mitad de la edad de su padre y el padre murió 4 años después de su hijo. Si x fue la edad en que murió Diofanto, estos datos conducen a la ecuación

$$\frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + 5 + \frac{1}{2}x + 4 = x$$

con una solución de $x = 84$. Por lo tanto, debe haber cumplido 84 años, pero en que año o incluso en que siglo no es seguro.

La gran obra en el que se basa la reputación de Diofanto es su *Arithmetica*, que puede describirse como el tratado más antiguo de algebra. Solo se han conservado seis libros de los trece originales. Es en el *Arithmetica* que encontramos el primer uso sistemático de notación matemática, aunque los signos utilizados son de la naturaleza de abreviaciones de palabras en vez de los símbolos algebraicos en el sentido en que hoy se utilizan. Se introducen símbolos especiales para representar conceptos que ocurren con frecuencia, como la cantidad desconocida en una ecuación y las potencias de una desconocida hasta la sexta potencia; Diofanto también tenía un símbolo para expresar la resta, y otro para igualdad.

La parte del libro que nos ha llegado consta de unos 200 problemas, que ahora podríamos expresar como ecuaciones, juntos con sus soluciones en números específicos. Se dedicó atención considerable a los problemas relacionados con cuadrados o cubos. Incluso para problemas con infinitas soluciones, Diofanto se contentó con encontrar uno. Normalmente se dio las soluciones en términos de números racionales positivos; en esa época no había la noción de números negativos como entidades matemáticas.

Aunque el *Arithmetica* no cae en el ámbito de la teoría de números, sin embargo dio un gran impulso al posterior desarrollo europeo del tema. A mediados de siglo XVII, el matemático francés Pierre de Fermat adquirió una traducción latina de los libros redescubiertos del tratado de Diofanto. Fermat embarcó a un estudio cuidadoso de sus técnicas de soluciones, buscando soluciones en enteros para reemplazar las soluciones racionales de Diofanto y abriendo nuevos caminos que el *Arithmetica* sólo insinuaba. Por ejemplo, un problema preguntó lo siguiente: hallar cuatro números tales que el producto de dos cualesquiera, aumentado por 1, es un cuadrado. En el siglo XVIII, Leonhard Euler trató el mismo problema con cuatro números, y recientemente se ha encontrado un conjunto de cinco números con la misma propiedad. Hasta el día de hoy el *Arithmetica* sigue siendo una fuente de inspiración a los teóricos de los números.

Es costumbre aplicar el término *ecuación diofántica* a cualquier ecuación en uno o más incógnitos que se quiere resolver en los números enteros. El tipo más simple de ecuación diofántica que consideraremos es la ecuación diofántica lineal en dos incógnitos:

$$ax + by = c$$

en donde a, b, y c son enteros dados y a y b no son ambos cero. Una solución de esta ecuación es un par en enteros x_0, y_0 tales que, cuando se sustituye en la ecuación, lo satisface; es decir, pedimos que $ax_0 + by_0 = c$. Curiosamente, la ecuación lineal no aparece en los trabajos existentes di Diofanto (la teoria requerida para resolverlo se encuentra en los *Elements* de Euclides), posiblemente porque lo veía como trivial; la mayoría de sus problemas tienen que ver con hallar cuadrados o cubos con propiedades especificas.

Una ecuación diofántica lineal dada puede tener varias soluciones, como es el caso con $3x + 6y = 18$, en donde

$$\begin{aligned} 3 \cdot 4 + 6 \cdot 1 &= 18 \\ 3(-6) + 6 \cdot 6 &= 18 \\ 3 \cdot 10 + 6(-2) &= 18 \end{aligned}$$

Por el contrario, no hay soluciones a la ecuación $2x + 10y = 17$. De hecho, el lado izquierdo es un entero cualquiera sea la elección de x e y, mientras que el lado derecho no es. Frente a esto, es razonable indagar sobre las circunstancias bajo las cuales es posible una solución y, cuando existe una solución, si podemos determinar explícitamente todas las soluciones.

La condición de solubilidad es fácil enunciar: la ecuación diofántica lineal $ax + by = c$ admite una solución si y solo si $d|c$, en donde $d = \mathrm{mcd}(a, b)$. Sabemos que hay enteros r y s tales que $a = dr$ y $b = ds$. Si una solución de $ax + by = c$ existe, de modo que $ax_0 + by_0 = c$ para x_0 e y_0 apropiados, entonces

$$c = ax_o + by_0 = drx_0 + dsy_0 = d(rx_0 + sy_0)$$

lo que simplemente dice que $d|c$. Recíprocamente, suponer que $d|c$, digamos $c = dt$. Utilizando la Teorema 2.3, se puede encontrar enteros x_0 e y_0 tales que $d = ax_0 + by_0$. Cuando esta relación se multiplica por t, obtenemos

$$c = dt = (ax_0 + by_0)t = a(tx_0) + b(ty_0)$$

Por lo tanto, la ecuación diofántica $ax + by = c$ tiene $x = tx_0$ e $y = ty_0$ como solución especifica. Esta demuestra parte de nuestro siguiente teorema.

Teorema 2.9. La ecuación diofántica lineal $ax + by = c$ tiene solución si y solo si $d|c$, en donde $d = \text{mcd}(a, b)$. Si $x_0, y_0)$ es una solución especifica a esta ecuación, entonces todas las demás soluciones están dadas por

$$x = x_0 + \left(\frac{b}{d}\right) t, y = y - \left(\frac{a}{d}\right) t$$

en donde t es un entero abitrario.

Demostración: Para establecer la segunda afirmación del teorema, supongamos que se conoce una solución x_0, y_0 a la ecuación dada. Si x', y' es otra solución, entonces

$$ax_0 + by_0 = c = ax' + by'$$

que es equivalente a

$$a(x' - x_0) = b(y_0 - y')$$

Por el corolario al Teorema 2.4, existen enteros coprimos r y s tales que $a = dr$, $b = ds$. Sustituyendo estas valores en la última ecuación y cancelando el factor común d, encontramos que

$$r(x' - x_0) = s(y_0 - y')$$

Ahora la situación es así: $r|s(y_0 - y')$, con $\text{mcd}(r, s) = 1$. Por el Lema de Euclides, debe ser que $r|(y_0 - y')$; es decir, $y_0 - y' = rt$ por algún entero t. Sustituyendo, obtenemos

$$x' - x_0 = st$$

Esto lleva a las fórmulas

$$x' = x_0 + st = x_0 + \left(\frac{b}{d}\right) t$$

$$y' = y_0 - rt = y_0 - \left(\frac{a}{d}\right) t$$

Es fácil ver que estos valores satisfacen la ecuación diofántica, independientemente de la elección de entero t; como

$$\begin{aligned} ax' + by' &= a\left[x_0 + \left(\frac{b}{d}\right)t\right] + b\left[y_0 - \left(\frac{a}{d}\right)t\right] \\ &= (ax_0 + by_0) + \left(\frac{ab}{d} - \frac{ab}{d}\right)t \\ &= c + 0 \cdot t \\ &= c \end{aligned}$$

Por lo tanto, hay infinitas soluciones a la ecuación dada, una para cada valor de t.

Ejemplo 2.4. Consideremos la ecuación lineal diofántica

$$172x + 20y = 1000$$

Aplicando el Algoritmo de Euclides a la evaluación de $\text{mcd}(172, 20)$, encontramos que

$$\begin{aligned} 172 &= 8 \cdot 20 + 12 \\ 20 &= 1 \cdot 12 + 8 \\ 12 &= 1 \cdot 8 + 4 \\ 8 &= 2 \cdot 4 \end{aligned}$$

y entonces $\text{mcd}(172, 20) = 4$. Como $4|1000$, existe una solución. Para obtener el entero 4 como combinación lineal de 172 y 20, trabajamos hacia atrasa través de los cálculos anteriores, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} 4 &= 12 - 8 \\ &= 12 = (20 - 12) \\ &= 2 \cdot 12 - 20 \\ &= 2(172 - 8 \cdot 20) - 20 \\ &= 2 \cdot 172 + (-17)20 \end{aligned}$$

Al multiplicar esta relación por 250, llegamos a

$$\begin{aligned} 1000 = 250 \cdot 4 &= 250[2 \cdot 172 + (-17)20] \\ &= 500 \cdot 172 + (-4250)20 \end{aligned}$$

de modo que $x = 500$ e $y = -4250$ proporcionen una solución a la ecuación en cuestión. Todas las demás soluciones se expresan por

$$\begin{aligned} x &= 500 + (20/4)t = 500 + 5t \\ y &= -4250 - (172/4)t = -4250 - 43t \end{aligned}$$

por algún entero t.

Un poco más de esfuerzo produce las soluciones en los enteros positivos, si algunas existen. Para esto, se debe elegir t para satisfacer simultáneamente las desiguldades

$$5t + 500 > 0 \qquad -43t - 4250 > 0$$

o, lo que es lo mismo,

$$-98\frac{36}{43} > t > -100$$

Como t debe ser un entero, nos vemos obligado a concluir que $t = -99$. Por lo tanto, nuestra ecuación diofántica tiene la única solución positiva $x = 5$, $y = 7$ correspondiente al valor $t = -99$.

Podría ser útil registrar la forma que toma a Teorema 2.9 cuando los coeficientes son enteros coprimos.

Corolario. Si $\text{mcd}(a, b) = 1$ y x_0, y_0 es una solución especifica a la ecuación lineal diofántica $ax + by = c$, entonces todas las soluciones están dadas por

$$x = x_0 + bt \qquad y = y_0 - at$$

para valores enteros de t.

Aquí hay un ejemplo. La ecuación $5x + 22y = 18$ tiene $x_0 = 8$, $y_0 = -1$ como una solución; por el corolario, la solución completa está dada por $x = 8 + 22t$, $y = -1 - 5t$ por t un número abitrario.

Las ecuaciones diofánticas surgen con frecuencia al resolver ciertos tipos de problemas planteados tradicionales, como lo demuestra este ejemplo.

Ejemplo 2.5: Una cliente compró una docena de piezas de fruta - manzanas y naranjas - para $\$1,32$. Si una manzana cuesta 3 centavos más que una naranja, y se compró más manzanas que naranjas, ¿Cuántas piezas de cada tipo compró?

Para configurar este problema como ecuación diofántica, sea x el número de manzanas comprado e y el número de naranjas comprado; además, sea z el costo (en centavos) de una naranja. Entonces las condiciones del problema conducen a

$$(z + 3)x + zy = 132$$

o equivalentemente

$$3x + (x + y)z) = 132$$

Como $x + y = 12$, se puede reemplazar la ecuación anterior por

$$3x + 12z = 132$$

lo que, en su turno, simplifica a $x + 4z = 44$.

En esencia, el objeto es hallar enteros x y z que satisfacen la ecuación diofántica

$$x + 4z = 44 \tag{1}$$

Ya que $\mathrm{mcd}(1,4) = 1$ es divisor de 44, hay una solución a esta ecuación. Al multiplicar la relación $1 = 1(-3) + 4 \cdot 1$ por 44 para obtener

$$44 = 1(-132) + 4 \cdot 44$$

resulta que $x_0 = -132$, $z_0 = 44$ es una solución. Todas las demás soluciones a (1) son de la forma

$$x = -132 + 4t \qquad z = 44 - t$$

en donde t es un entero.

No todas las elecciones para t dan soluciones al problema original. Solo se debería considerar valores de t que aseguran que $12 \geq x > 6$. Esto requiere obtener los valores de t tales que

$$12 \geq -32 + 4t > 6$$

Ahora, $12 \geq -132 + 4t$ implica que $t \leq 36$, mientras $-132 + 4t > 6$ nos da $t > 34\frac{1}{2}$. Los únicos valores integrales de t que satisfacen ambos desigualdades son $t = 35$ y $t = 36$. Por lo tanto, hay dos compras posibles: una docena de manzanas que cuestan 11 centavos cada una (el caso $t = 36$) o 8 manzanas que cuestan 12 centavos cada una y 4 naranjas a 9 centavos cada una (el caso $t = 35$).

Problemas lineales indeterminados como estos tienen una historia larga y ocurren ya en el primer siglo en la literatura matemática china. Debido a la falta de simbolismo algebraica, a menudo aparecían en forma de rompecabezas o acertijos retóricos. Los contenidos del *Clásico Matemático* de Chang Ch'iu-chien (siglo VI) atestiguan a la habilidades algebraicas de los eruditos chinos. Este elaborado tratado contiene uno de los problemas más famosos en ecuaciones indeterminadas, en el sentido de transmisión a las otras sociedades - el problema del "cien aves." El problema dice:

Si un gallo vale 5 monedas, una gallina 3 monedas, y tres pollitos juntos 1 moneda, ¿cuántas gallos, gallinas, y pollitos, en total 100, se pueden comprar con 100 monedas?

En términos de ecuaciones, el problema se escribía (si x iguala al número de gallos, y al número de gallinas, y z el número de pollitos):

$$5x + 3y + \frac{1}{3}z = 100 \qquad x + y + x = 100$$

Eliminando una de las incógnitas, nos quedamos con una ecuación lineal diofántica en las dos demás incógnitas. Específicamente, debido a la igualdad $z = 100 - x - y$, tenemos $5x + 3y + \frac{1}{3}(100 - x - y) = 100$, o

$$7x + 4y = 100$$

Esta ecuación tiene la solución general $x = 4t$, $y = 25-7t$, de modo que $z = 75+3t$, en donde t es un entero arbitrario. El propio Chang dio varias respuestas:

$$x = 4 \qquad y = 18 \qquad z = 78$$
$$x = 8 \qquad y = 11 \qquad z = 81$$
$$x = 12 \qquad y = 4 \qquad z = 74$$

Un poco más de esfuerzo produce todas las soluciones en los enteros positivos. Para esto, se debe elegir t para satisfacer simultáneamente las desigualdes

$$4t > 0 \qquad 25 - 7t > 0 \qquad 75 + 3t > 0$$

Los dos últimas de estos son equivalente al requisito $-25 < t < 3\frac{4}{7}$. Como t debe tener un valor positivo, concluimos que $t = 1, 2, 3$ que conduce a precisamente los valores que obtuvo Chang.

PROBLEMAS 2.5

1. ¿Cuáles de las siguientes ecuaciones Diofánticas no se puede resolver?
a) $6x + 51y = 22$.
b) $33x + 14y = 115$.
c) $14x + 35y = 93$.

2. Determinar todas las soluciones en los enteros a las siguientes ecuaciones Diofánticas:
a) $56x + 72y = 40$.
b) $24x + 138y = 18$.
c) $221x + 35y = 11$.

3. Determinar todas las soluciones en los enteros positivos a las siguientes ecuaciones Diofánticas:
a) $18x + 5y = 48$.
b) $54x + 21y = 906$.
c) $123x + 360y = 99$.
d) $158x - 57y = 7$.

4. Si a y b son enteros coprimos, demostrar que la ecuación diofántica $ax - by = c$ tiene infinitas soluciones en los enteros positivos.
[Consejo: Existen enteros x_0 e y_0 tales que $ax_0 + by_0 = c$. Para cualquier entero t mayor que $|x_0|/b$ e $|y_0|/a$, una solución positiva a la ecuación dada es $x = x_0 + bt$, $y = -(y_0 - at)$.]

5. a) Un hombre tiene $\$4,55$ en monedas, compuesto solo de monedas de diez y veinticinco centavos. ¿Cuales son los números máximos y mínimos de monedas que puede tener? Es posible que el número de monedas de diez iguala al número de monedas de veinticinco?

b) El teatro del barrio cobra $1,80 por la entrada de adultos y $0,75 por niños. En una noche particular, los ingresos totales fueron $90. Suponiendo que había más adultos que niños, ¿cuántas personas asistieron?
c) Se suman un número específico de seises y nueves para obtener una suma de 126; si se intercambia el número de seises y nueves, la suma nueva es 114. ¿Cuántas de cada había originalmente?

6. Un agricultor compró 100 animales con costo total de $4000. Los precios fueron los siguientes: terneros, $120 cada uno; corderos, $50 cada uno; lechones, $25 cada uno. Si el agricultor obtuvo al menos uno de cada tipo, ¿cuántos de cada tipo compró?

7. Cuando Sr. Smith cobró un cheque en el banco, el cajero confundió el número de centavos con el número de dolares y viceversa. Sin darse cuenta de esto, Sr. Smith gastó 68 centavos y luego notó para su sorpresa que tenía el doble del cheque original. Determinar el valor mínimo por el cual podría haber emitido el cheque.
[Consejo: Si x denota el número de dolares e y el número de centavos en el cheque, entonces $100y + x - 68 = 2(100x + y)$.]

8. Resolver los siguientes problemas-acertijos:
a) Alcuin de York, 775. Se distribuyen cien almudes de grano entre 100 personas de tal manera que cada hombre recibe 3 almudes, cada mujer 2 almudes, y cada niño $\frac{1}{2}$ almud. ¿Cuántos hombres, mujeres, y niños hay?
b) Mahaviracarya, 850. Había 63 montones de plátanos juntos y 7 plátanos sueltos. Fueron divididos equitativamente entre 23 viajeros. ¿Cuál es el número de plátanos en cada montón?
[Consejo: Considerar la ecuación diofántica $63x + 7 = 23y$.]
c) Yen Kung, 1372. Tenemos un número incógnito de monedas. Si se hacen 77 cadenas de ellas, faltan 50 monedas; pero si se hacen 78 cadenas, es exacto. ¿Cuántas monedas hay?
d) Christoff Rudolff, 1526. Hallar el número de hombres, mujeres, y niños en un grupo de 20 personas si juntos pagan 20 monedas, cada hombre pagando 3, cada mujer 2, y cada niño $\frac{1}{2}$.
e) Euler, 1770. Escribir 100 como la suma de dos números, uno divisible por 7 y el otro divisible por 11.