MAT-120 Tarea 4

Teoría de Números

Fecha limite: 11 de septiembre de 2023

1. Demostrar que, si n es impar, entonces la última digita de n^4 es 1 o 5. Después demostrar que, si n es par, entonces la última digita de n^4 es 0 o 6. (Consejo: aritmética modular!)

2. Demostrar que si $(a, n) = 1$, entonces el conjunto $c, c + a, c + 2a, \ldots, c + (n - 1)a$ es un conjunto completo de restos (CCR) mod n. (Consejo: Por el Principio de la Cajas, es suficiente demostrar que los elementos del conjunto son no congruentes mod n.)

b) Corollario: Demostrar que, si $a, a + 1, \ldots, a + n - 1$ son n enteros consecutivos, entonces este conjunto también forma un CCR mod n.

3. Resolver los siguientes congruencias:

a) $12x \equiv 18 \pmod{31}$

b) $7x \equiv 1 \pmod{21}$

c) $16x \equiv 2 \pmod{29}$

d) $6x \equiv 15 \pmod{15}$

e) $6x \equiv 15 \pmod{25}$

f) $24x \equiv 32 \pmod{56}$

4. Usar el Teorema de Restos Chinos para resolver los siguientes conjuntos de ecuaciones simultaneas:

a) $x \equiv 2 \pmod{3}$, $x \equiv 1 \pmod{5}$, $x \equiv 3 \pmod{7}$.

b) $x \equiv 5 \pmod{14}$, $x \equiv 1 \pmod{19}$, $x \equiv 13 \pmod{17}$.

c) $2x \equiv 1 \pmod{5}$, $x \equiv 5 \pmod{6}$, $x \equiv 18 \pmod{49}$.

5. Demostrar que, si $a \equiv b \pmod{n_1}$ y $a \equiv b \pmod{n_2}$ y $(n_1, n_2) = 1$, entonces $a \equiv b \pmod{n_1 n_2}$. Consejo: Lema de Euclides!

6. Tenemos una canasta de granadillas. Cuándo se sacan granadillas en grupos $2, 3, 4, 5,$ o 6, quedan, respectivamente, $1, 2, 3, 4,$ o 5 granadillas. Cuándo los sacamos en grupos de 7, no quedan nadas. Hallar el número mínimo de granadillas que puede ser en la canasta.