MAT-120 Tarea 3

Teoría de Números

Fecha limite: 4 de septiembre de 2023

1. Hallar cinco primos de la forma $n^2 + 1$ y cinco primos de la forma $2^n - 1$.

2. Demostrar que no hay primos de la forma $n^2 - 1$ mayor que 3.

3. Sea p un primo. Demostrar que, si $p > 3$, entonces p tiene la forma $6k + 1$ o $6k + 5$.

4. Sea p un primo. Demostrar que, si $p > 3$, entonces $p^2 + 2$ no es primo. (Consejo: Usar número 3.)

5. Sean $p, p + 2$ primos gemelos con $p > 3$.

a) Demostrar que el producto de p y $p + 2$ siempre es una menos que un cuadrado perfecto.

b) Demostrar que la suma de p y $p + 2$ siempre es divisible por 12.

6. Hallar los primeros cinco primos en la sucesión $\{11n + 5\}$, $n \geq 0$.

7. Demostrar que si $a \equiv b \pmod{n}$ y $m|n$, entonces $a \equiv b \pmod{m}$.

8. Demostrar que si $a \equiv b \pmod{n}$ y $c > 0$, entonces $ca \equiv cb \pmod{cn}$.

9. Hacer lo siguiente:

a) Hallar todas las soluciones a $a^2 \equiv 1 \pmod{16}$.

b) Hallar en ejemplo para demostrar que $a^3 \equiv b^3 \pmod{n}$ no siempre implica $a \equiv b \pmod{n}$. (Existen ejemplos con $n < 10$.)

10. Hallar los restos cuándo:

a) 10^{23457} es dividido por 11.

b) 2^{352} es dividido por 10.

c) 7^{67} es dividido por 100.

11. Escribir los siguientes proposiciones con notación mod y demostrarles. (No van a necesitar inducción.)

a) $8|3^{2n} - 1$ for any $n \in \mathbf{Z}^+$.

b) $5|3^{3n+1} + 2^{n+1}$ for any $n \in \mathbf{Z}^+$.