

MAT-120 Tarea 2
Teoría de Números
Fecha limite: 28 de agosto de 2023

1. Sea $n \in \mathbf{Z}^+$. Demostrar por inducción que $8|3^{2n} - 1$.
2. Sea $n \in \mathbf{Z}^+$. Demostrar por inducción que $5|3^{3n+1} + 2^{n+1}$.
3. Sea $n \in \mathbf{Z}$. Demostrar por casos (y el algoritmo de división) que n^3 tiene la forma $9k$, $9k + 1$, o $9k - 1$.
4. Sean $a, n \in \mathbf{Z}$. Demostrar que $(a, a + n)|n$.
5. Sea $a \in \mathbf{Z}$. Demostrar que $(a, a + 1) = 1$. (Consejo: usar problema 4.)
6. Sea $a \in \mathbf{Z}$. Demostrar que:
 - a) $(2a + 1, 9a + 4) = 1$
 - b) $(5a + 2, 7a + 3) = 1$
7. Sean $a, b, c \in \mathbf{Z}$, con $(a, b) = 1$ y $c|b$. Demostrar que $(a, c) = 1$.
8. Usar el Algoritmo de Euclides para hallar una solución entera $967x + 1001y = 1$; después hallar una solución a $967x + 1001y = 12$.
9. Para las ecuaciones siguientes, hallar todas las soluciones enteras o demostrar que no existen.
 - a) $9x + 51y = 26$
 - b) $3x + 111y = 15$
 - c) $7x + 35y = 44$
 - d) $7x + 35y = -56$
10. Escribir 100 como la suma de dos enteros, uno divisible por 7 y el otro divisible por 11.
11. Un agricultor compró 100 animales con un costo de \$4000. Había vacas, con un precio de \$120 cada uno, llamas, con un precio de \$50 cada uno, y ovejas, con un precio de \$25 cada uno. Si se compró por lo menos un animal de cada tipo, cuántos de cada tipo ha comprado?
12. Demostrar que si $m, n \in \mathbf{Z}$ y $(m, n) = 1$, entonces $(m, n^2) = 1$.