

MAT-120 Tarea 2  
Teoría de Números  
Fecha limite: 28 de agosto de 2023

1. Sea  $n \in \mathbf{Z}^+$ . Demostrar por inducción que  $8|3^{2n} - 1$ .
2. Sea  $n \in \mathbf{Z}^+$ . Demostrar por inducción que  $5|3^{3n+1} + 2^{n+1}$ .
3. Sea  $n \in \mathbf{Z}$ . Demostrar por casos (y el algoritmo de división) que  $n^3$  tiene la forma  $9k$ ,  $9k + 1$ , o  $9k - 1$ .
4. Sean  $a, n \in \mathbf{Z}$ . Demostrar que  $(a, a + n)|n$ .
5. Sea  $a \in \mathbf{Z}$ . Demostrar que  $(a, a + 1) = 1$ . (Consejo: usar problema 4.)
6. Sea  $a \in \mathbf{Z}$ . Demostrar que:
  - a)  $(2a + 1, 9a + 4) = 1$
  - b)  $(5a + 2, 7a + 3) = 1$
7. Sean  $a, b, c \in \mathbf{Z}$ , con  $(a, b) = 1$  y  $c|b$ . Demostrar que  $(a, c) = 1$ .
8. Usar el Algoritmo de Euclides para hallar una solución entera  $967x + 1001y = 1$ ; después hallar una solución a  $967x + 1001y = 12$ .
9. Para las ecuaciones siguientes, hallar todas las soluciones enteras o demostrar que no existen.
  - a)  $9x + 51y = 26$
  - b)  $3x + 111y = 15$
  - c)  $7x + 35y = 44$
  - d)  $7x + 35y = -56$
10. Escribir 100 como la suma de dos enteros, uno divisible por 7 y el otro divisible por 11.
11. Un agricultor compró 100 animales con un costo de \$4000. Había vacas, con un precio de \$120 cada uno, llamas, con un precio de \$50 cada uno, y ovejas, con un precio de \$25 cada uno. Si se compró por lo menos un animal de cada tipo, cuántos de cada tipo ha comprado?
12. Demostrar que si  $m, n \in \mathbf{Z}$  y  $(m, n) = 1$ , entonces  $(m, n^2) = 1$ .