MAT-120 Tarea 1

Teoría de Números

Fecha limite: 21 de agosto de 2023

1.Sea $n \in \mathbf{Z}^+$. Demostrar por inducción que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

2. Sea $n \in \mathbf{Z}^+$. Demostrar por inducción que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

3. Sea $n \in \mathbf{Z}^+$. Demostrar por inducción que $3|n^3 - n$.

4. Sean $n \in \mathbf{Z}^+$ y $a \in \mathbf{R}$ con $1 + a > 0$. Demostrar por inducción que $(1 + a)^n \geq 1 + na$.

5. Sea $n \in \mathbf{Z}$. Demostrar por casos (y el algoritmo de división) que $3|n^3 - n$.

6. Sea $n \in \mathbf{Z}$. Demostrar por casos (y el algoritmo de división) que $n^3 + 5n + 3$ es siempre impar.

7. Sean $a, b, c \in \mathbf{Z}$. Usar la definición de divisibilidad para demostrar los siguientes propiedades:

a) Si $a|b$ y $b|c$, entonces $a|c$.

b) Si $a|b$, entonces $a^3|b^4$.

c) Si $a|b$ y $a|c$, entonces $a|bx + cy$ por cualquier $x, y \in \mathbf{Z}$.

8. Usar el algoritmo de Euclides para hallar $(301, 3001)$.

9. Usar el algoritmo de Euclides para hallar $(7608, 134664)$.

10. Sean $a, b \in \mathbf{Z}$ con $(a, b) = 1$. Demostrar que $(a + b, a - b) = 1$ o 2. Después, dar ejemplos para mostrar que los dos casos ocurren.

11. Sean $a, b \in \mathbf{Z}$ con $(a, b) = 1$. Demostrar que si $a|c$ y$b|c$, entonces $ab|c$. (Consejo: pensar en $ax + by = 1$.)

12. Sean $a, b \in \mathbf{Z}$. Demostrar que $(a, ab + 1) = 1$.